Über eine Formel der Determinantentheorie.

Von **F. Mertens.**

1.

Es sei Θ eine ganze Function der $m.n$ Elemente

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn}, \end{matrix}\right.$$

welche in Bezug auf die Elemente

$$(2)\qquad a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots a_{m1}$$

homogen und vom Grade m_1, in Bezug auf die Elemente

$$(3)\qquad a_{12}, a_{22}, a_{32}, \ldots a_{m2}$$

homogen und vom Grade m_2 u. s. w., in Bezug auf die Elemente

$$(4)\qquad a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \ldots a_{mn}$$

homogen und vom Grade m_n ist, und es werde zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} a_{\lambda 1} & a_{\lambda 2} & \cdot & \cdot & a_{\lambda n} \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \cdot & \cdot & a_{\mu n} \\ & & & & \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \cdot & \cdot & a_{\rho n} \end{vmatrix} = A_{\lambda\mu\ldots\rho}$$

$$\Sigma a_{\alpha p'} a_{\beta q'} \ldots a_{\varepsilon s'} \frac{\partial^k \Theta}{\partial a_{\alpha p}\, \partial a_{\beta q} \ldots \partial a_{\varepsilon s}} = \Theta \begin{pmatrix} p' q' & \cdot & s' \\ p\; q & \ldots & s \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial^n \Theta}{\partial a_{\lambda\alpha}\, \partial a_{\mu\beta} \cdot \cdot\, \partial a_{\rho\varepsilon}} = \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta)$$

gesetzt, wo sich das erste Summenzeichen auf alle Werthe $1, 2, \ldots m$ der k reihenden Elemente $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ bezieht, unter dem zweiten dagegen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ alle Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots n$ zu durchlaufen haben und das Vorzeichen $\pm$ sich, wie bei der Bildung einer Determinante, nach der jeweiligen Classe der betreffenden Permutation richtet. Nennt man jeden Ausdruck von der Form

$$\Theta \binom{p'}{p} = a_{1p'} \frac{\partial \Theta}{\partial a_{1p}} + a_{2p'} \frac{\partial \Theta}{\partial a_{2p}} + \cdot \;\; \cdot + a_{mp'} \frac{\partial \Theta}{d a_{mp}}$$

eine Polare von Θ, die Polare einer Polare von Θ, d. h. einen Ausdruck von der Form

$$\Theta \binom{p'}{p} \binom{q'}{q} = a_{1q'} \frac{\partial . \Theta \binom{p'}{p}}{\partial a_{1q}} + a_{2q'} \frac{\partial . \Theta \binom{p'}{p}}{\partial a_{2q}} + \ldots + a_{mq'} \frac{\partial . \Theta \binom{p'}{p}}{\partial a_{mq}}$$

eine mehrfache Polare u. s. w. und bezeichnet allgemein mit $\Pi(\Theta)$ ein aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren jedes eine mit einem Zahlenfactor versehene mehrfache Polare von Θ ist, bestehendes Polynom, mit $\Pi^{(k)}(\Theta)$ dagegen ein eben solches Polynom, wenn alle seine Glieder Polaren von Ausdrücken sind, welche in Bezug auf die Elemente (4) vom Grade k sind, so lässt sich Θ identisch auf die Form

$$\Theta = \Pi^{(0)}(\Theta), \tag{5}$$

wenn $m < n$, und

$$\Theta = \Pi^{(0)}(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta_1), \tag{6}$$

wenn $m \geqq n$, bringen; das Summenzeichen bezieht sich auf alle der Grösse der Stellenzeiger nach geordneten Combinationen n^{ter} Classe $\lambda\mu\ldots\rho$ der Zahlen $1, 2, \ldots m$ und Θ_1 bezeichnet einen Ausdruck von der Form

$$\Theta_1 = \frac{1}{M}\Theta + \Pi(\Theta),$$

M eine ganz positive Zahl.

I. Es seien, um die Formeln (5), (6) zu beweisen, $\lambda, \mu, \ldots \sigma, \tau$ k verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots n$ und $S_{\lambda\mu\ldots\tau}$ die Summe aller Ausdrücke von der Form

$$(7)\qquad (-1)^h \Theta \binom{\alpha}{\tau}\binom{\beta}{\alpha}\cdots\binom{\varepsilon}{\delta}\binom{\tau}{\varepsilon},$$

wo $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ irgend eine Combination h—1[ter] Classe der Stellenzeiger $\lambda\mu\ldots\sigma$ ohne Wiederholung bezeichnet. Man hat dann

$$(8)\qquad m_\tau \Theta = S_{\lambda\mu\ldots\tau} + (-1)^{k-1}\Theta \binom{\mu\nu\ldots\tau\lambda}{\lambda\mu\ldots\sigma\tau}.$$

Der Ausdruck (7) zerfällt nämlich, wenn die geforderten Differentiationen ausgeführt werden, in

$$\begin{aligned}
&(-1)^h \Theta \binom{\tau}{\tau} \\
&+(-1)^h \Theta \binom{\alpha\tau}{\tau\alpha} + (-1)^h \Theta \binom{\beta\tau}{\tau\beta} + \ldots + (-1)^h \Theta \binom{\varepsilon\tau}{\tau\varepsilon} \\
&+(-1)^h \Theta \binom{\alpha\beta\tau}{\tau\alpha\beta} + . \\
&+\ldots \\
&+(-1)^h \Theta \binom{\alpha\beta\ldots\varepsilon\tau}{\tau\alpha\beta\ldots\varepsilon}
\end{aligned}$$

und es kommt demnach der Ausdruck $\Theta\binom{\tau}{\tau}$ in $S_{\lambda\mu\ldots\rho}$ mit dem Coëfficienten

$$\binom{k-1}{1} - \binom{k-1}{2} + \binom{k-1}{3} - \ldots \quad = 1,$$

jeder Ausdruck von der Form $\Theta\binom{\alpha\beta.\;\;.\tau}{\tau\alpha.\;\;.\varepsilon}$, wenn $k > 2$ und die Anzahl p—1 der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ (ausser τ) $< k-1$ ist, mit dem Coëfficienten

$$(-1)^p \left[1 - \binom{k-p}{1} + \binom{k-p}{2} - ..\right] = 0$$

und der Ausdruck $\Theta\binom{\lambda\mu\ldots\tau}{\tau\lambda\mu\ldots\sigma}$ mit dem Coëfficienten $(-1)^k$ vor; überdies ist

$$(9)\qquad \Theta\binom{\tau}{\tau} = a_{1\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{1\tau}} + a_{2\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{2\tau}} + \ldots + a_{m\tau}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{m\tau}} = m_\tau\Theta$$

wegen der Homogeneität von Θ in Bezug auf die Elemente

$$a_{1\tau}, a_{2\tau}, \ldots a_{m\tau}.$$

Bezeichnet nun $pq \ldots s$ irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots n$ und $\lambda\mu\ldots\tau$ einen k-gliedrigen Cykel derselben, so hat man, wenn $k > 1$, nach (8):

$$m_\tau \Theta = \Pi(\Theta) + (-1)^{k-1}\,\Theta\begin{pmatrix}\mu & \ldots & \lambda \\ \lambda\mu & \ldots & \tau\end{pmatrix} \tag{10}$$

und man darf annehmen, dass τ der grösste unter den Stellenzeigern des Cykels ist. Aber auch für einen eingliedrigen Cykel τ gilt diese Gleichung, wenn man $\Pi(\Theta) = 0$ setzt und erwägt, dass nach (9)

$$m_\tau \Theta = \Theta\begin{pmatrix}\tau \\ \tau\end{pmatrix}$$

ist. Besteht die Permutation $pq \ldots s$ aus mehr als einem Cykel und bezeichnet $\lambda'\mu'\ldots\tau'$ einen zweiten mit k' Stellenzeigern, so wende man die Formel (10) auf den Cykel $\lambda'\mu' \ldots \tau'$ und den Ausdruck

$$(-1)^{k-1}\,\Theta\begin{pmatrix}\mu & \ldots & \lambda \\ \lambda\mu & \ldots & \tau\end{pmatrix} = m_\tau \Theta - \Pi(\Theta)$$

an; es wird dann, da letzterer in Bezug auf

$$a_{1\tau'}, a_{2\tau'}, \ldots a_{m\tau'}$$

von demselben Grade wie Θ ist und ein Aggregat von Polaren desselben wieder die Form $\Pi(\Theta)$ hat:

$$(-1)^{k-1} m_{\tau'}\,\Theta\begin{pmatrix}\mu\ldots\lambda \\ \lambda\mu\ldots\tau\end{pmatrix} = \Pi(\Theta) + (-1)^{k-1+k'-1}\,\Theta\begin{pmatrix}\mu & \ldots & \lambda\mu' & \ldots & \lambda' \\ \lambda\mu & \ldots & \tau\lambda'\mu' & \ldots & \tau'\end{pmatrix}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (10) ein, so wird

$$m_\tau m_{\tau'}\,\Theta = \Pi(\Theta) + (-1)^{k-1+k'-1}\,\Theta\begin{pmatrix}\mu & \ldots & \lambda\mu' & \ldots & \lambda' \\ \lambda\mu & \ldots & \tau\lambda'\mu' & \ldots & \tau'\end{pmatrix}.$$

So kann fortgefahren werden, bis alle Cykeln der Permutation $pq \ldots s$ erschöpft sind, und man erhält allgemein:

$$m_\tau \ldots \Theta = \Pi(\Theta) + (-1)^{n-g}\,\Theta\begin{pmatrix}p\,q & \ldots & s \\ 1\,2 & \ldots & n\end{pmatrix}, \tag{11}$$

wo g die Anzahl der Cykeln der Permutation $pq \ldots s$ — die eingliedrigen mitgerechnet — und $\tau \ldots$ die grössten in den einzelnen Cykeln enthaltenen Stellenzeiger bezeichnen.

Summirt man alle Gleichungen (11), welche den verschiedenen Permutationen $pq\ldots s$ entsprechen, so ergibt sich

$$(12) \qquad M.\Theta = \Pi(\Theta) + \Sigma(-1)^{n-g}\,\Theta\begin{pmatrix} p & q & \ldots & s \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

wo M die Summe der Producte $m_{\tau}\ldots$ bezeichnet. Es ist aber

$$\Theta\begin{pmatrix} p & q & \ldots & s \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = \Sigma\, a_{\alpha p}\, a_{\beta q}\ldots a_{\varepsilon s}\,\frac{\partial^n\,\Theta}{\partial a_{\alpha 1}\,\partial a_{\beta 2}\ldots\partial a_{\varepsilon n}}$$

und daher

$$\Sigma(-1)^{n-g}\,\Theta\begin{pmatrix} p & q & \ldots & s \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = \Sigma\, A_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}\,\frac{\partial^n\,\Theta}{\partial a_{\alpha 1}\,\partial a_{\beta 2}\ldots\partial a_{\varepsilon n}}.$$

Ist nun $m < n$, so verschwinden alle Determinanten $A_{\alpha\beta\ldots\varepsilon}$ identisch, weil unter den Stellenzeigern $\alpha, \beta\ldots$ gleiche vorkommen müssen, und man hat

$$\Sigma(-1)^{n-g}\,\Theta\begin{pmatrix} p & q & \ldots & s \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = 0.$$

Ist dagegen $m \geqq n$, so braucht das Summenzeichen nur auf diejenigen Zahlensysteme $\alpha\beta\ldots$ bezogen zu werden, welche aus allen möglichen Permutationen der einzelnen der Grösse der Stellenzeiger nach geordneten Combinationen $\lambda\mu\ldots\rho$ n^{ter} Classe (ohne Wiederholung) der Zahlen $1, 2, \ldots m$ bestehen; bilden aber $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ eine Permutation der Combination $\lambda\mu\ldots\rho$, so hat man

$$A_{\alpha\beta\ldots\varepsilon} = \pm A_{\lambda\mu\ldots\rho},$$

wo das Vorzeichen der Classe der Permutation $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ entspricht, und derjenige Bestandtheil der Summe, welcher sich auf alle Permutationen von $\lambda\mu\ldots\rho$ bezieht, ist

$$= A_{\lambda\mu\ldots\rho}\,\Sigma \pm \frac{\partial^n\,\Theta}{\partial a_{\alpha 1}\,\partial a_{\beta 2}\ldots\partial a_{\varepsilon n}} = A_{\lambda\mu\ldots\rho}\,\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta),$$

so dass, über alle Combinationen $\lambda\mu\ldots\rho$ erstreckt,

$$\Sigma(-1)^{n-g}\,\Theta\begin{pmatrix} p & q & \ldots & s \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = \Sigma\, A_{\lambda\mu\ldots\rho}\,\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Theta)$$

wird. Dividirt man noch die Gleichung (12) durch die Zahl M, welche nicht $= 0$ sein kann, wenn $m_n > 0$, da ja $M \geqq m_n$ ist, wie aus der auf die cyklische Permutation $2\,3 \ldots n\,1$ bezogenen Gleichung (11) hervorgeht, so hat man

$$\Theta = \Pi(\Theta), \tag{13}$$

wenn $m < n$, und

$$\Theta = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\frac{1}{M}\Theta\right), \tag{14}$$

wenn $m \geqq n$.

II. Um eine Polare eines Ausdrucks von der Form

$$\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi)$$

zu bilden, genügt es, die dazu führende Operation unter dem Zeichen ∇ an Φ zu vollziehen, d. h. es ist

$$\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi)\binom{p'}{p} = \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\Phi\binom{p'}{p}\right). \tag{15}$$

Greift man nämlich aus dem Ausdrucke

$$\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\Phi\binom{p'}{p}\right) = \Sigma \pm \frac{\partial^n . \Phi\binom{p'}{p}}{\partial a_{\lambda\alpha}\, \partial a_{\mu\beta} \ldots \partial a_{\rho\varepsilon}}$$

je zwei Glieder

$$\pm \frac{\partial^n \Phi\binom{p'}{p}}{.\,\partial a_{\sigma p} \ldots \partial a_{\tau p'} \ldots}, \mp \frac{\partial^n \Phi\binom{p'}{p}}{\ldots \partial a_{\sigma p'} \quad .\,\partial a_{\tau p}\,.}$$

heraus, welche zwei nur durch die Vertauschung von p und p' sich unterscheidenden Permutationen $\ldots p. \quad .p' \ldots, \ldots p' \ldots p.$ entsprechen, so ist, weil diese Glieder entgegengesetzte Vorzeichen haben

$$\pm \frac{\partial^n \Phi\binom{p'}{p}}{.\,\partial a_{\sigma p} \ldots \partial a_{\tau p'} \ldots} \mp \frac{\partial^n \Phi\binom{p'}{p}}{\ldots \partial a_{\sigma p'} \ldots \partial a_{\tau p} \ldots} =$$

$$= \left(\pm \frac{\partial^n \Phi}{\ldots \partial a_{\sigma p} \ldots \partial a_{\tau p'} \ldots} \mp \frac{\partial^n \Phi}{\ldots \partial a_{\sigma p'} \ldots \partial a_{\tau p} \ldots}\right)\binom{p'}{p},$$

woraus die Gleichung (15) folgt.

Aus dieser Gleichung ergibt sich ferner:

$$(16) \quad [\Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi)] \binom{p'}{p} =$$

$$= \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \binom{p'}{p} . \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} . (\nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}(\Phi)) \binom{p'}{p} =$$

$$= \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\Phi \binom{p'}{p}\right),$$

da identisch

$$A_{\lambda\mu\ldots\rho} \binom{p'}{p} = 0$$

ist.

III. Der Ausdruck $\Pi(\Theta)$ in (14) besteht aus lauter Gliedern von der Form

$$G = c\,\Theta \binom{p'}{p} \binom{q'}{q} \qquad \binom{t'}{t}$$

und der Herleitung zufolge ist immer wenigstens $p' < p$. Es kann auch noch $q' < q$ sein. Es seien in der Zahlenreihe $p, q, \ldots t$

$$p, q, \qquad r$$

die ersten aufeinander folgenden Stellenzeiger, für welche

$$p' < p, q' < q, \ldots r' < r$$

ist. Das Glied G kann dann als Polare des Ausdrucks

$$(17) \qquad \Phi = c\,\Theta \binom{p'}{p} \binom{q'}{q} \qquad \binom{r'}{r}$$

aufgefasst werden. Ist nun für jedes Glied G der Ausdruck Φ vom Grade 0 in Bezug auf die Elemente (4), so hat man die Formel (6). Ist dagegen für ein Glied G der Ausdruck noch nicht vom Grade 0 in Bezug auf $a_{1n}, a_{2n} \ldots a_{mn}$, so kann man auf denselben die Formel (14) anwenden. Es wird dann

$$(18) \qquad \Phi = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho}\left(\frac{1}{M'} \Phi\right)$$

und es ist klar, dass jedes Glied von $\Pi(\Theta)$ in dieser Formel die Gestalt

$$G' = c'\,\Theta \binom{p'}{p} \binom{q'}{q} \qquad \binom{r'}{r} \binom{s'}{s}$$

hat, wo neben

$$p' < p, q' < q, \dots r' < r$$

wenigstens auch noch $s' < s$ ist. Aus (18) folgt hierauf nach (16)

$$G = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\dots\rho} \nabla_{\lambda\mu\dots\rho}\left(\frac{1}{M'} G\right). \tag{19}$$

Ersetzt man in der Gleichung (14) das Glied G durch den Ausdruck (19) und verfährt mit allen ähnlichen Gliedern ebenso, so ergibt sich

$$\Theta = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\dots\rho} \nabla_{\lambda\mu\dots\rho}\left(\frac{1}{M} \Theta + \frac{1}{M'} G + \quad \right).$$

Diese Gleichung lässt sich, wenn sie noch nicht die Form (6) hat, ebenso wie (14) behandeln und es ist klar, dass man zu einer Gleichung von der Form (6) gelangen muss, wenn man das beschriebene Verfahren hinreichend oft wiederholt. Nach k-maliger Wiederholung gelangt man nämlich entweder schon zu einer Gleichung von der gewünschten Form, oder aber doch zu einer Gleichung von der Form

$$\Theta = \Pi(\Theta) + \Sigma A_{\lambda\mu\dots\rho} \nabla_{\lambda\mu\dots\rho}\left(\frac{1}{M} \Theta + \frac{1}{M'} G + \quad \right),$$

in welcher jedes Glied von $\Pi(\Theta)$ als Polare eines Ausdrucks Φ von der Form (17) auftritt, in welchem die Anzahl der Stellenzeiger $p, q, \dots r$ wenigstens k beträgt. Sind nun $\mu_1, \mu_2, \quad \mu_n$ beziehungsweise die Gradzahlen von Φ in Bezug auf die Elemente (2), (3), ... (4), so ist

$$\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + n\mu_n = m_1 + 2m_2 + \\ + nm_n - (p-p') - (q-q') - \dots - (r-r'),$$

und da

$$p - p' + q - q' + \quad \dots + r - r' \geqq k,$$

so wird

$$\mu_n \leqq \frac{1}{n}(m_1 + 2m_2 + \quad + nm_n - k).$$

Bei hinreichend grossem k muss daher $\mu_n = 0$ werden.

Dieselben Schlüsse führen von (13) zu (5).

2.

Bezeichnen

$$\begin{array}{l} a'_{11}\ a'_{12}\ .\ \ .\ a'_{1n} \\ a'_{21}\ a'_{22}\ .\ .\ .\ a'_{2n} \\ \\ a'_{m1}\ a'_{m2}\ .\ .\ .\ a'_{mn} \end{array}$$

$m.n$ beliebige Elemente und $A'_{\lambda\mu\ldots\rho}$ die Determinante

$$\Sigma \pm a'_{\lambda 1}\, a'_{\mu 2} \ldots a'_{\rho n},$$

so kann man, wenn $m \geqq n$ und $m_n > 1$, die Formel (6) auf den Ausdruck

$$\Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} (\Theta_1)$$

anwenden und erhält

$$\begin{aligned} \Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} (\Theta_1) = & \Pi^0 (\Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} (\Theta_1)) \\ & + \Sigma A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} [\Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} (\Theta_2)] \\ & = \Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} [\Pi^{(1)} (\Theta)] \\ & + \Sigma A'_{\lambda\mu\ldots\rho} A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} (\Theta_2), \end{aligned}$$

wo Θ_2 wieder die Form $\frac{1}{N}\Theta + \Pi(\Theta)$ hat. Setzt man dann

$$a'_{11} = a_{11}\ a'_{12} = a_{12} \ldots a'_{mn} = a_{mn},$$

so wird

$$\begin{aligned} \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} (\Theta_1) = & \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} [\Pi^{(1)} \Theta] \\ & + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} (\Theta_2), \end{aligned}$$

woraus nach (6)

$$\begin{aligned} \Theta = \Pi^0(\Theta) + & \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} (\Pi^{(1)} (\Theta_1)) \\ & + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} (\Theta_2) \end{aligned}$$

folgt. So kann fortgefahren werden, bis die Gradzahl m_n erschöpft ist, und es ergibt sich allgemein

$$\begin{aligned} (20) \qquad \Theta = \Pi^0(\Theta) + & \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} (\Pi^{(1)} (\Theta_1)) + \\ & + \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \qquad \nabla_{\gamma\rho\ldots\mu} \nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \ldots (\Theta_{mn}), \end{aligned}$$

wo

$$\Theta_{m_n} = \frac{1}{P}\Theta + \Pi(\Theta).$$

Für $n = 2$ findet man diese Formel bei Clebsch (Theorie der binairen algebraischen Formen).

3.

Die Formel (20) lässt sich auf die Bestimmung der allgemeinen Gestalt eines ganzen Ausdrucks Θ der Coëfficienten von m linearen Formen

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \quad + a_{1n}\,x_n \\ y_2 &= a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \quad + a_{2n}\,x_n \\ & \\ y_m &= a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n \end{aligned} \tag{21}$$

der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ anwenden, welcher letztere nicht enthält und einer Identität von der Form

$$\Theta\, x_n^r = QY + Q'Y' + \tag{22}$$

genügt, wo $Q, Q',$ ganze Polynome der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Coëfficienten von $y_1, y_2, \ldots$ und $Y, Y', .$ Producte von k gleichen oder verschiedenen Factoren bezeichnen, deren jeder eine der Formen (21) ist. Diese Anwendung beruht auf der Eigenschaft von Θ, dass jede ein- oder mehrfache Polare von Θ, welche in Bezug auf die Elemente

$$a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{mn} \tag{23}$$

den Grad k nicht erreicht, identisch verschwindet.

Einerseits genügt nämlich jede Polare $\Theta\binom{p'}{p}$, in welcher $p' < p$, einer Identität von derselben Form wie Θ. Aus (22) folgt

$$\Theta\binom{p'}{p} x_n^r = Q\binom{p'}{p} \quad Y + Q'\binom{p'}{p} \quad Y' +$$

$$+ Q\,.\,Y\binom{p'}{p} + Q' \quad Y'\binom{p'}{p} +$$

es ist aber

$$Y\binom{p'}{p} = x_p \left(\frac{\partial Y}{\partial y_1} a_{1p'} + \frac{\partial Y}{\partial y_2} a_{2p'} + \quad + \frac{\partial Y}{\partial y_m} a_{mp'}\right)$$

$$= x_p \frac{\partial Y}{\partial x_{p'}}$$

$$Y'\binom{p'}{p} = x_p \frac{\partial Y'}{\partial x_{p'}}$$

und da (22), nach $x_{p'}$ differenziirt, die Identität

$$0 = Y \frac{\partial Q}{\partial x_{p'}} + Y' \frac{\partial Q'}{\partial x_{p'}} + \quad + Q \frac{\partial Y}{\partial x_{p'}} + Q' \frac{\partial Y'}{\partial x_{p'}} +$$

gibt, so wird

$$\Theta\binom{p'}{p} . x_n^r = \left(Q\binom{p'}{p} - x_p \frac{\partial Q}{\partial x_{p'}}\right) Y + \left(Q'\binom{p'}{p} - x_p \frac{\partial Q'}{\partial x_{p'}}\right) Y' + .$$

Andererseits muss jeder der Identität (22) genügende Ausdruck Θ, welcher in Bezug auf die Elemente (23) den Grad k nicht erreicht, identisch verschwinden. Setzt man, unter $t_1, t_2, \ldots t_m$ beliebige Elemente verstanden, in (22) $x_n = 1$ und für $i = 1, 2, . \quad . m$

$$a_{in} = t_i - a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - . \quad - a_{in-1} x_{n-1},$$

wodurch Θ in Θ^0 übergehen möge, so erscheint Θ^0 als Polynom, dessen sämmtliche Glieder in Bezug auf $t_1, t_2, .. \ t_m$ wenigstens k^{ten} Grades sind, und muss daher identisch verschwinden. Setzt man dann $x_1 = x_2 = . \quad . = x_{n-1} = 0$, $t_1 = a_{1n}$, $t_2 = a_{2n}, \ldots t_m = a_{mn}$, wodurch Θ^0 wieder in Θ übergeht, so ergibt sich $\Theta = 0$.

Wenn aber jede Polare von Θ, welche in Bezug auf die Elemente (23) den Grad k nicht erreicht, identisch verschwindet, so haben die einzelnen Bestandtheile von Θ, welche sowohl in Bezug auf die Elemente (2) als in Bezug auf die Elemente (3) u. s. w. homogen, aber in Bezug auf eine oder mehrere der genannten Elementengruppen verschiedenen Grades sind, dieselbe Eigenschaft. Es sei B einer dieser Bestandtheile, welcher in Bezug auf die Elemente (23) den Grad $k-1$ übersteigt — andere, welche diese Eigenschaft nicht haben, kommen nicht in

Betracht, da sie identisch verschwinden. Man hat dann, da alle Ausdrücke

$$\Pi^0(B), \Pi^{(1)}(B), \Pi^{(k-1)}(B)$$

identisch verschwinden, nach (20)

$$B = \Sigma A_{\lambda\mu\ldots\rho} A_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \cdot \quad \nabla_{\lambda\mu\ldots\rho} \nabla_{\lambda'\mu'\ldots\rho'} \cdot \quad . (B_k)$$

und es erscheint somit B in der Gestalt

$$B = A.P + A'.P' +$$

wo $A, A', \ldots$ ganze Polynome der Coëfficienten der Formen (21) und P, P', Producte von k-Determinanten n^{ter} Ordnung der nämlichen Formen bezeichnen.

Da dasselbe von allen Bestandtheilen B von Θ gilt, so hat man auch

$$\Theta = A.P + A'.P' + \ldots \tag{24}$$

Wäre $m < n$, so führen dieselben Schlüsse zu der Gleichung

$$\Theta = 0. \tag{25}$$

4.

Jede Invariante Θ der m linearen Formen (21) genügt einer Identität von der Gestalt (22). Es gehe allgemein y_p durch die Substitution

$$x_\mu = \xi_{1\mu} X_1 + \xi_{2\mu} X_2 + \quad + \xi_{n\mu} X_n \quad \mu = 1, 2, \ldots n$$

in

$$y_{p1} X_1 + y_{p2} X_2 + \quad + y_{pn} X_n$$

über, wo also

$$y_{pq} = a_{p1} \xi_{q1} + a_{p2} \xi_{q2} + \quad + a_{pn} \xi_{qn},$$

und Θ in $\overline{\Theta}$, wenn allgemein a_{pq} durch y_{pq} ersetzt wird. Man hat dann, wenn

$$\Sigma \pm \xi_{11} \xi_{22} \quad \ldots \xi_{nn} = \Xi$$

gesetzt wird,

$$\overline{\Theta} = \Xi^r \quad \Theta. \tag{26}$$

Wendet man diese Identität auf die Substitution

$$(27)\quad x_1 = X_1 + z_1 X_n \quad x_2 = X_2 + z_2 X_n \quad \ldots \quad x_{n-1} = X_{n-1} + z_{n-1} X_n \quad x_n = z_n X_n$$

an und setzt

$$a_{p1} z_1 + a_{p2} z_2 + \ldots + a_{pn} z_n = Z_p,$$

so wird

$$z_n^r \Theta = \overline{\Theta}$$

und $\overline{\Theta}$ ein Polynom, in welchem die Elemente $z_1, z_2, \ldots z_n$ nur in den Ausdrücken

$$(28)\qquad Z_1, Z_2, \ldots Z_m$$

vorkommen und welches daher nur aus Gliedern bestehen kann, die wenigstens r der genannten Ausdrücke als Factoren enthalten. Θ muss sonach, wenn $m \geqq n$, nach (24) die Gestalt

$$A . P + A' . P' + \ldots$$

haben und es ist klar, dass $A, A', \ldots$ constante Factoren sind. Aus der Identität (26) folgt nämlich, wenn man den Grad beider Seiten in Bezug auf die Substitutionscoëfficienten $\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots \xi_{nn}$ in Betracht zieht, dass Θ vom Grade $n . r$ in Bezug auf die Coëfficienten von $y_1, y_2, \ldots$ sein muss, wenn es nicht etwa identisch verschwindet.

Jede Invariante m linearer Formen von n Veränderlichen lässt sich daher, wenn $m \geqq n$, als homogene Function der Determinanten n^{ter} Ordnung dieser Formen darstellen. — Weniger als n lineare Formen mit n Veränderlichen besitzen keine Invariante (25).

Bezeichnet $\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Covariante der Formen (21), welche in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ vom Grade μ ist und der Identität

$$(29)\quad \overline{\Theta}(X_1, X_2, \ldots X_n) = \Xi^r \Theta(\xi_{11} X_1 + \xi_{21} X_2 + \ldots + \xi_{n1} X_n, \ldots)$$

genügt, wo $\overline{\Theta}(X_1, \ldots)$ aus $\Theta(x_1, \ldots)$ hervorgeht, wenn allgemein a_{pq} durch y_{pq} und x_i durch X_i ersetzt wird, so ergibt sich, wenn man die Identität (29) auf die Substitution (27) anwendet

$$(30) \quad z_n^r \Theta(X_1 + z_1 X_n, X_2 + z_2 X_n, \ldots z_n X_n) = \overline{\Theta}(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

und man schliesst, wie oben, dass $\overline{\Theta}(X_1, X_2, \ldots)$ aus lauter Gliedern bestehen muss, welche wenigstens r von den Ausdrücken (28) als Factoren enthalten. Diese Eigenschaft geht nicht verloren, wenn

$$X_1, X_2, \ldots X_{n-1}, X_n$$

durch

$$z_n x_1 - z_1 x_n, z_n x_2 - z_2 x_n, \ldots z_n x_{n-1} - z_{n-1} x_n, x_n$$

ersetzt werden, und es hat sonach

$$z_n^{r+\mu} \Theta(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

dieselbe Eigenschaft. Hieraus folgt, wenn $r > 0$ und $m \geqq n$, nach (24)

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n) = P.A(x_1, x_2, \ldots x_n) + P' A'(x_1, x_2, \ldots x_n) + \ldots$$

$A(x_1, x_2, \ldots x_n)$, sind, wie aus der Betrachtung der Gradzahlen von $\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n)$ hervorgeht, ganze Polynome μ^{ten} Grades sowohl in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_n$ als auch $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{mn}$. Setzt man diesen Ausdruck in die Identität (30) ein, so ergibt sich nach Forthebung von z_n^r

$$\Theta(X_1 + z_1 X_n, X_2 + z_2 X_n, \ldots z_n X_n) = P.\bar{A}(X_1, X_2, \ldots X_n) \\ + P' \bar{A}'(X_1, X_2, \ldots X_n) +$$

Die Gleichsetzung der Glieder, welche X_n^μ enthalten, gibt dann

$$\Theta(z_1, z_2, \ldots z_n) = P.C + P'C' +$$

wo $C, C', \ldots$ die Coëfficienten von X_n^μ in $\bar{A}(X_1, X_2, \ldots), \bar{A}'(X_1, X_2, \ldots) \ldots$ bezeichnen. Da aber $\bar{A}(X_1, X_2, \ldots), \ldots$ Functionen von

$$\begin{matrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n-1}, Z_1 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n-1}, Z_2 \end{matrix}$$

sind, so haben $C, C', \ldots$ die Form

$$C = \psi(Z_1, Z_2, \ldots Z_m) + \chi$$
$$C' = \psi'(Z_1, Z_2, \ldots Z_m) + \chi'$$

wo ψ, ψ', ganze homogene Functionen μ^{ten} Grades von $Z_1, Z_2, \ldots Z_m$ bezeichnen, deren Coëfficienten die Elemente $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{mn}$ nicht mehr enthalten, $\chi, \chi', \ldots$ dagegen in Bezug auf $z_1, z_2, \ldots z_n$ den Grad μ nicht erreichen. Man hat daher auch

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots x_n) = P. \psi(y_1, y_2, \ldots y_m) + P'. \psi'(y_1, y_2, \ldots y_m) + .$$

Jede Covariante m linearer Formen mit n Veränderlichen erscheint sonach, wenn $m \geqq n$ und ihr Exponent $r > 0$ ist, als ganzes homogenes Polynom dieser Formen und ihrer Determinanten n^{ter} Ordnung. — Wenn $m < n$, so gibt es keine Covariante, für welche $r > 0$ wäre. — Wenn $r = 0$, so erscheint jede Covariante, wie sich leicht zeigen lässt, als homogenes Polynom von $y_1, y_2, \ldots y_m$.

Die vorstehenden Sätze wurden zuerst von Clebsch (Crelle-Borrhardt's Journal, Bd. 59) gegeben.